Análisis Diferencial

Shirley Bromberg

Atlixco, 2-5 de enero de 2014

Introducción

El objetivo del Análisis Diferencial es describir el comportamiento de una función a partir del comportamiento de sus derivadas. El primer ejemplo es el dado por el teorema

Teorema
Dada $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivable tal que $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces f es estríctamente creciente.

En este taller nos proponemos analizar teoremas de este tipo en situaciones más generales. La base de estas notas es el libro de Análisis Diferencial ([1]).

1 Teoremas Fundamentales

El teorema que enunciamos anteriormente es un corolario del Teorema del Valor Medio:

Teorema 1 (Teorema del Valor Medio)
Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ derivable. Entonces dados $x, y \in (a, b)$ existe c entre x e y tal que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x).$$

Cuando f es de clase C^1 podemos ser más explícitos:

Teorema 2
Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ de clase C^1. Entonces dados $x, y \in (a, b)$

$$f(y) - f(x) = (y - x) \int_0^1 f'((1 - t)x + ty)dt.$$

Actividad 1.1 *El teorema 2 tiene otro nombre. ¿Cuál?*

Una consecuencia de estos teoremas es el Teorema de Taylor de orden N:

Teorema 3 (Teorema de Taylor de orden N)
Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, N veces derivable en x. Entonces

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-\sum_{i=0}^{N}\frac{1}{i!}f^{(i)}(x)h^i}{h^N}=0.$$

Acompañando a este tenemos

Teorema 4 (Teorema de Taylor de orden N con residuo integral)

Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ de clase C^N. Entonces

$$f(x+h)-\sum_{i=0}^{N-1}\frac{1}{i!}f^{(i)}(x)h^i=\frac{h^N}{(N-1)!}\int_0^1 f^{(N)}((x+th)dt$$

Claramente el teorema 4 implica el teorema 3.
Recordemos que llamamos polinomio de Taylor de f de orden N centrado en x a

$$T_x^N f(h):=\sum_{i=0}^{N}\frac{1}{i!}f^{(i)}(x)h^i$$

Estos resultados para funciones reales a valor real se pueden extender a funciones definidas sobre espacios más generales. Para ello requerimos definir con cuidado la noción de *derivada*.
Comencemos con funciones $f:U\to\mathbb{R}^m$ con $U\subset\mathbb{R}^n$ abierto.

Definición 1 (Derivada de Fréchet)
Dada f como dijimos, se dice que es derivable *en x si existe $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ lineal tal que*

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-T(h)}{\|h\|}=0.$$

Algunas observaciones y resultados

- Si f es derivable en x entonces la derivada es única y se denota por $Df(x)$.

- Si f es derivable en x entonces la **matriz** de $Df(x)$ en las coordenadas "usuales" de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ es

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

- Si f es derivable en x entonces f es continua en x. Esto es consecuencia de que toda función lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ es continua.

Sea E y F espacios vectoriales reales. En lo que sigue denotaremos por $\mathcal{L}(E,F)$ al espacio vectorial de las transformaciones lineales de E en F.

Actividad 1.2 *Demostrar que todo elemento de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es continuo.*

Contrastemos esta manera de describir la derivada con la manera "clásica". Para ello veamos cómo se define en el libro de Cálculo Avanzado de W. Kaplan ([2]). Lo primero que se hace es definir las derivadas parciales, es decir, las entradas de lo que va a ser la matriz de la derivada:

Definición 2
Sea $f : U \to \mathbb{R}$ con $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+t\mathbf{e}_i) - f(x)}{t}$$

existe, se llama i-ésima derivada parcial *de f en x y se denota por*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

Después se define la *diferencial total.* A continuación una transcripción:
Dada $z = f(x, y)$ vamos a considerar el efecto de variar simultáneamente x e y. Fijamos (x, y) en el dominio de f y sea $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ otro punto del dominio. Entonces la función cambia por una cantidad

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y).$$

Esto define Δz como función de Δx y Δy con la propiedad de que se anula cuando $\Delta x = \Delta y = 0$.
Se dice que la función $z = f(x, y)$ tiene *diferencial total* en (x, y) si en este punto

$$\Delta z = a\Delta x + b\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y,$$

donde a y b no dependen ni de Δx ni de Δy y ϵ_1, ϵ_2 son funciones de Δx, Δy tales que

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \epsilon_1 = 0, \qquad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \epsilon_2 = 0$$

La función lineal de Δx, Δy

$$a\Delta x + b\Delta y$$

se llama la *diferencial total* de f en (x, y) se denota por dz :

$$dz = a\Delta x + b\Delta y.$$

Observación:

La derivada de Fréchet recupera el hecho de que la derivada debe ser la función **lineal** que mejor aproxima a la función cerca de un punto específico.

A continuación vamos a re-interpretar el cálculo vectorial con esta nueva manera de ver la derivada de aplicaciones $f : U \to \mathbb{R}^m$ con U abierto en $\mathbb{R}^m$. Comencemos con el Teorema del Valor medio.

Actividad 1.3 *Suponga que f es como antes, de clase C^1 y que el segmento que une x con y está contenido en U. Enuncie y demuestre un teorema de valor medio. ¿Cree que es posible obtener un resultado de este tipo para funciones a valor vectorial? Estudie cuáles son los obstáculos para demostrar el teorema para funciones vectoriales y basado en el análisis, construya un contra-ejemplo*

Sin embargo es posible tener una versión del Teorema del Valor Medio.

Teorema 5 (Teorema del Valor Medio)
Sea $f : U \to \mathbb{R}^m$ de clase C^1 . Entonces

$$f(x+h) - f(x) = \left(\int_0^1 \mathrm{D}\, f(x+th) dt \right)(h)$$

Actividad 1.4 *Interprete el lado derecho de la igualdad y deduzca el teorema*

Supongamos ahora que f es derivable en todo punto de U. Esto define una función

$$Df : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

A pesar de que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ no es de manera canónica un $\mathbb{R}^N$ sí es un espacio vectorial finito dimensional y con las definiciones que tenemos podemos pensar en derivarla. Si Df es derivable en x su derivada debe ser una aplicación lineal

$$D(Df)(x) : \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m),$$

es decir, para cada $h \in \mathbb{R}^n$, $D(Df)(x)(h) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, y después podemos evaluarla en otro elemento de $\mathbb{R}^n$, k: y obtenemos $(D(Df)(x)(h))\,(k) \in \mathbb{R}^m$.

Actividad 1.5 *Muestre que la aplicación*

$$\begin{array}{rccc} D^2f(x) & : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^m \\ & (h,k) & \mapsto & (D(Df)(x)(h))\,(k) \end{array}$$

es bilineal. Muestre además que, cuando $m = 1$ *existe una matriz cuadrada de orden* n, M, *tal que*

$$D^2f(x)(h,k) = (h_1, h_2, \cdots, h_n)M(k_1, k_2, \cdots, k_n)^T.$$

Así se recupera lo que hacemos para la segunda derivada de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sin recurrir a las coordenadas. También podemos expresar el hecho de que, bajo condiciones adecuadas,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) :$$

Lema 1 (Lema de Schwarz)
Sea f *como antes. Entonces si* f *tiene segunda derivada en* x *ella es simétrica, es decir, para todo* $h, k \in \mathbb{R}^n$

$$D^2f(x)(h,k) = D^2f(x)(k,h).$$

Entonces, si f tiene segunda derivada en x, $D^2f(x) \in \mathcal{L}^2_{\mathrm{sim}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Además la expresión

$$D^2f(x)h^2 = D^2f(x)(h,h)$$

cobra un nuevo sentido.

De manera recursiva podemos definir las derivadas de orden superior: Si f tiene derivada de orden N en una vecindad de $x \in \mathbb{R}^n$, es decir si existe $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto tal que

$$D^N f : U \to \mathcal{L}^N_{\text{sim}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

podemos pensar en derivarla en x y su derivada será una función lineal

$$D(D^N)f(x) \quad : \mathbb{R}^n \quad \to \quad \mathcal{L}^N_{\text{sim}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

Haciendo una re-interpretación como la que hicimos para la segunda derivada, obtenemos que

$$D^{N+1} f(x) \in \mathcal{L}^{N+1}_{\text{sim}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

La afirmación de que las derivadas de orden superior son simétricas se demuestra mediante un argumento de inducción.

Actividad 1.6 *¿Cómo se construye este argumento?*

Como $D^N f(x) \in \mathcal{L}^n_{\text{sim}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ definimos

$$D^n f(x)(h^n) := D^n f(x)(h, h, \cdots, h).$$

En nuestras manos tenemos manera de definir el polinomio de Taylor de orden N de f centrado en x :

$$T^N_x f(h) := \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{i!} D^i f(x)(h^i)$$

y de enunciar los Teoremas de Taylor de orden N

Teorema 6 (Teorema de Taylor de orden N)
Sea $f : U \to \mathbb{R}^m$ N veces derivable en x. Entonces

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - T^N_x f(h)}{\|h\|^N} = 0.$$

Junto con esta también tenemos

Teorema 7 (Teorema de Taylor de orden N con residuo integral)

Sea $f : U \to \mathbb{R}^m$ de clase C^N. Entonces

$$f(x+h) - T_x^{N-1}f(h) = \frac{1}{(N-1)!}\left(\int_0^1 D^N f(x+th)dt\right)(h^N)$$

Por supuesto que tenemos que entender qué significa

$$\left(\int_0^1 D^N f(x+th)dt\right)(h^N)$$

Actividad 1.7 *¿Qué significa?*

La demostración de los Teoremas de Taylor cuando $m = 1$ se obtiene a partir del Teorema de Taylor para funciones de variable real a valor real, utilizando la regla de la cadena: se estudia la función de variable real a valor real

$$t \mapsto f(x+th)$$

Actividad 1.8 *Analice esta situación. ¿Cómo pasamos del caso $m = 1$ al caso general?*

El siguiente teorema dice que el polinomio de taylor es el único con las propiedades de aproximación dadas por el teorema 6.

Teorema 8 (Recíproco del Teorema de Taylor)
Sean

$$f_i : U \to \mathcal{L}^i_{\text{sim}}(\mathbb{R}^n, r^m), \quad i = 0, 1, \cdots, N,$$

continuas y tales que para todo $x_0 \in U$

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ x \to x_0}} \frac{1}{\|h\|^N}\left(f(x+h) - \sum_{i=0}^{N} \frac{1}{i!} f_i(x)(h^i)\right) = 0.$$

Entonces f es de clase C^N en U y $D^i f(x) = f_i(x)$, $i = 0, 1, \cdots, N$.

Actividad 1.9 *¿Qué significa y cómo se demuestra el resultado cuando $n = m = 1$? ¿Puede esto decirnos cómo proceder en el caso general?*

2 Espacios vectoriales grandes

En la sección anterior nos desprendimos de las coordenadas y en consecuencia estamos preparados para trabajar en espacios vectoriales más grandes. Comencemos por $E := \mathrm{C}([0,1])$ el espacio de las funciones continuas a valor real definidas sobre el intervalo compacto $[0,1]$. Tomemos $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua y definimos

$$\begin{array}{rccl} F: & E & \to & E \\ & x & \mapsto & F(x)(t) = x(t) - \int_0^t f(x(s))ds \end{array}$$

Ahora queremos derivar esta función en $x \in E$. Es decir queremos encontrar una función lineal $T : E \to E$ *aproxime* a F. Lo primero que debemos tener es una definición de *aproximar* es decir debemos tener una topología en E. Considerando que la topología en $\mathbb{R}^n$ está dada por una norma, comencemos con esta manera de dotar a un espacio vectorial de una topología.

Definición 3
Sea E un espacio vectorial real. Se dice que

$$\|\cdot\| : E \to [0, +\infty)$$

es una norma *sobre E si satisface:*

- $\|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0$;
- *para todo $x \in E$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$;*
- *dados $x, y \in E$, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.*

Observación

Una norma definida sobre un espacio vectorial define una distancia en el espacio vectorial y por lo tanto una topología. Con la notación de la definición: dados $x, y \in E$ se define

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

En lo que sigue $(E, \|\cdot\|)$ denota un espacio normado.

Actividad 2.1

- *Muestre que dos normas definidas sobre $\mathbb{R}^n$ definen la misma topología.*

- *¿Cuál es la dimensión de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$? Defina una norma en este espacio vectorial.*

Definición 4
Un espacio de Banach *es un espacio vectorial real, con una norma $(E, \|\cdot\|)$ tal que el espacio métrico inducido es completo.*

Definimos para $f \in \mathrm{C}([0,1])$

$$\begin{array}{rcl} \|f\|_\infty & := & \max\{|f(t)|; t \in [0,1]\} \\ \|f\|_1 & := & \int_0^1 |f(t)|dt \end{array}$$

Actividad 2.2 *Demuestre las siguientes afirmaciones:*

- $\|\cdot\|_\infty$ *y* $\|\cdot\|_1$ *son normas.*
- *la función F definida anteriormente es continua con respecto a $\|\cdot\|_\infty$.*
- *si $\{f_k\}_k$ converge a f con respecto a $\|\cdot\|_\infty$ entonces $\{f_k\}_k$ converge a f con respecto a $\|\cdot\|_1$. Compare los cerrados de $\mathrm{C}([0,1])$ con respecto a $\|\cdot\|_\infty$ y a $\|\cdot\|_1$.*
- $(\mathrm{C}([0,1]), \|\cdot\|_1)$ *no es un espacio de Banach. Para ello considere la sucesión en $\mathrm{C}([0,1])$, $\{f_k\}_k$, definida como $f_k(t) = t^k$. Muestre que es una sucesión de Cauchy que no es convergente.*

Actividad 2.3 *Definimos*

$$c_0 = \{(x_i)_i; x_i \in \mathbb{R}, \lim_{i\to\infty} x_i = 0\}$$

y para $(x_i)_i \in c_0$, $\|(x_i)_i\| := \sup\{|x_i|; i \in \mathbb{N}\}$. Así definidos $(c_0, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach. Muestre que

$$F := \{(x_i)_i\,;\, x_i \in \mathbb{R},\ x_i = 0,\ \textit{salvo para un número finito de índices}\}$$

es un subespacio denso de c_0. Compare con lo que pasa en $\mathbb{R}^n$.

Como hay una dualidad entre subespacios cerrados y transformaciones lineales continuas, no podemos esperar que todas las transformaciones lineales definidas sobre espacios de Banach no finito dimensionales sean continuas. Definimos entonces en este contexto $\mathcal{L}(E_1, E_2)$ como el espacio de transformaciones lineales de E_1 en E_2 continuas.

Actividad 2.4

- *Muestre que* $T : E_1 \to E_2$ *lineal es continua si y solamente si el subconjunto de* E_2
$$\{Tx\,;\,\|x\| \leq 1\}$$
es acotado. Entonces se define

- *para* $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$
$$\|T\| := \sup\{\|Tx\|_2\,;\,\|x\|_1 \leq 1\}.$$
Muestre que si $(E_2, \|\cdot\|_2)$ *es espacio de Banach,* $(\mathcal{L}(E_1, E_2), \|\cdot\|)$ *es espacio de Banach.*

- *Cuando* $E_1 = \mathbb{R}^m$ *y* $E_2 = \mathbb{R}$, *¿como se ve esta norma? Y ¿Cómo cuando* $E_1 = E_2 = \mathbb{R}^2$?

En el caso de espacios vectoriales de dimensión finita el concepto del que se suele partir es el de derivadas parciales y, por extensión, el de derivadas direccionales. También podemos definir conceptos análogos en el caso general.

Definición 5 (Derivada de Gâteaux)
Sea $f : U \to E_2$ *con* $U \subset E_1$ *abierto. Si para cada* $v \in E_1$ *el límite*
$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$
se dice que f *es* Gâteaux diferenciable *en* x.

Observación

Es claro que si f es Fréchet derivable, entonces f es Gâteaux derivable. Por lo tanto calcular la derivada de Gâteaux es un primer paso para calcular la derivada de Fréchet.

Actividad 2.5 *Considere la función homogénea* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por*
$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$
Muestre que f *es Gâteaux derivable en* 0 *pero no (Fréchet) derivable.*

Calculemos la derivada de Gâteau de F en $0 \in \mathrm{C}([0,1])$, cuando la norma considerada en $\mathrm{C}([0,1]$ y f es de clase C^1. Tenemos que

$$F(0)(\tau) = 0(\tau) - \int_0^\tau f(0(s))ds = -\tau f(0)$$

y dada $h \in \mathrm{C}([0,1])$

$$\begin{aligned}(F(th) - F(0))(\tau) &= th(\tau) - \textstyle\int_0^\tau f(th(s))ds + \tau f(0) \\ &= th(\tau) - \textstyle\int_0^\tau \left(f(th(s) - f(0)\right) ds \\ &= th(\tau) - \textstyle\int_0^\tau th(s)(\int_0^1 f'(\sigma th(s))d\sigma)ds\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{F(th) - F(0)}{t}(\tau) = h(\tau) - \int_0^\tau h(s)\left(\int_0^1 f'(\sigma th(s))d\sigma\right)ds.$$

Finalmente

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(th) - F(0)}{t}(\tau) = h(\tau) - f'(0)\int_0^\tau h(s)ds.$$

La derivada de F se compone de dos funciones lineales:

$$\begin{array}{rccc}\mathrm{Id}: & \mathrm{C}([0,1]) & \to & \mathrm{C}([0,1]) \\ & h & \mapsto & h\end{array}$$

y

$$\begin{array}{rccc}S: & \mathrm{C}([0,1]) & \to & \mathrm{C}([0,1]) \\ & h & \mapsto & \tau \mapsto \int_0^\tau h(s)ds\end{array}$$

y por lo tanto tenemos un buen candidato para la derivada de Fréchet.

Actividad 2.6
Consideramos el espacio de Banach $(\mathrm{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$.

- *Demuestre que* $S : \mathrm{C}([0,1]) \to \mathrm{C}([0,1])$ *es lineal y continua.*
- *Compruebe que*

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(th) - F(0)}{t} = \mathrm{Id}(h) - f'(0)S(h),$$

  en $(\mathrm{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$ *y que la derivada es lo que se propuso.*

- *Sea* $F : \mathrm{C}([0,1]) \to \mathrm{C}([0,1])$ *definida por*

$$F(f)(\tau) = (f(\tau))^2.$$

Halle la derivada de F *en* f_0.

- *Sea* $F : \mathrm{C}([0,1]) \to \mathrm{C}([0,1])$ *definida por*

$$F(f)(\tau) = |f(\tau)|.$$

¿Dónde es F *derivable?*

También tenemos para estos espacios un Teorema del Valor Medio.

Teorema 9 (Desigualdad del Valor Medio) *Sea* $f : U \to E_2$ *con* $U \subset E_1$ *de clase* C^1 *. Sean* $x, y \in U$ *tales que el segmento que une* x *con* y *entonces*

$$\|f(y) - f(x)\|_2 \leq \|y - x\|_1 \sup\{\| \mathrm{D} f(1-t)x + ty\| \, ; \, t \in [0,1]\}.$$

Actividad 2.7 *Cuando* E_1 *y* E_2 *son finito dimensionales esto es consecuencia del teorema 5. Para espacios generales cuando no tenemos coordenadas, el teorema se demuestra usando que si* $T \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ *entonces*

$$\|T\| = \sup\{\|\ell \circ T\| \, ; \, \ell \in \mathcal{L}(E_2, \mathbb{R}), \|\ell\| = 1\}.$$

3 Teoremas de Función Inversa e Implícita

Recordemos que el teorema de la función implícita es un resultado técnico que dice que, bajo ciertas hipóstesis, la ecuación

$$F(x, y) = 0$$

define *implícitamente* una de las variables en términos de la otra, es decir *se puede despejar.*
El teorema de la función inversa dice que, de nuevo bajo hipótesis adecuadas la ecuación

$$F(x) = y$$

tiene solución única y que la función que se produce es de clase C^1 .
Como ambos teoremas tratan de solución de ecuaciones no es de extrañar que sean equivalentes. Enunciemos con precisión los teoremas:

Teorema 10 (Teorema de la Función Implícita)
Sea $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *abierto y* $F : U \to \mathbb{R}^m$ *de clase* C^1 *tal que la aplicación lineal* $\partial_y F(x_0, y_0) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *es un isomorfismo.*
Entonces existen $\rho, \sigma \in \mathbb{R}^+$ *y*

$$u : B^n_\rho(x_0) \to B^m_\sigma(y_0)$$

de clase C^1*, tales que* $u(x_0) = y_0$ *y*

$$(x, y) \in B_\rho(x_0)^n \times B^m_\sigma(y_0) \cap F^{-1}(F(x_0, y_0)) \Longleftrightarrow y = u(x).$$

Además u *es de clase* C^1.

Actividad 3.1 *Muestre que el teorema de la función implícita de clase* C^1 *implica el teorema de clase* C^r *.*

Teorema 11 (Teorema de la Función Inversa)
Sean $f : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ *abierto y* f *de clase* C^r. *Supongamos que* $x_0 \in U$ *es tal que* $\mathrm{D}f(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *isomorfismo. Entonces existen* V_1, V_2 *abiertos que contienen respectivamente a* x_0 *y* $f(x_0)$ *con* $f(V_1) = V_2$ *y*

$$g : V_2 \to V_1$$

de la misma clase que f *tal que*

$$g \circ f(x) = x$$

para todo $x \in V_1$ *y*

$$f \circ g(y) = y$$

para todo $y \in V_2$.

Proposición 1
El teorema de la función implícita implica el teorema de la función inversa.

Actividad 3.2 *Ya observamos que el teorema de la función inversa requiere resolver una ecuación. Use esta afirmación para demostrar la proposición 1.*

Proposición 2
El teorema de la función inversa implica el teorema de la función implícita.

Aquí lo que se hace es considerar

$$F(x, y) = (x, f(x, y))$$

y el teorema de la función inversa da un teorema de función implícita con parámetros.
Para demostrar los teoremas "basta" con ver que la ecuación que se debe resolver en cada caso tiene solución única y por lo tanto define una función cuya diferenciabilidad es consecuencia del teorema de Taylor.

Actividad 3.3 *¿Cómo se demuestra la afirmación anterior? Es decir, suponga que existen $x_i \in U_i \subset E_i$ con U_i abierto en E_i, $i = 1, 2$, de manera que la ecuación*

$$f(x) = y$$

tiene una única solución en U_1 para todo $y \in U_2$. Diseñe una estrategia para demostrar el teorema de la función inversa en clase C^1 y muestre que el teorema de clase C^r se demuestra por inducción

Hay una herramienta para resolver ecuaciones

Teorema 12 (Teorema de Punto Fijo de Banach) *Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea $f : X \to X$ tal que para todo $x, y \in X$*

$$d(f(y), f(x)) \leq \rho\, d(x, y)$$

donde $\rho \in (0, 1)$. Entonces existe un único $x_0 \in M$ que satisface

$$f(x_0) = x_0.$$

Este teorema solamente requiere la completez lo que abre la posibilidad de tener este teorema para espacios de Banach.
El teorema del punto fijo de Banach permite demostrar el teorema de la función inversa para funciones definidas sobre un espacio de Banach E. Con este propósito, observemos que una solución de

$$f(x) = y$$

es un punto fijo de la función

$$F(x) = y + x - f(x).$$

Pensemos que f tiene en x_0 la derivada más isomorfismo...

$$\mathrm{D}\, f(x_0) = \mathrm{Id}_E.$$

Para no llevar cuentas supongamos además que $f(x_0) = x_0 = 0$.

Actividad 3.4 *Con estas piedrecitas, vea que puede construise un argumento que involucre al teorema del punto fijo de Banach.*

Otro resultado técnico que se requiere es el siguiente: Sea E un espacio de Banach. Definimos $Gl(E)$ es el conjunto de isomorfismos lineales continuos de E.

Teorema 13
$Gl(E)$ es subconjunto abierto de $\mathcal{L}(E, E)$. Aún más, la aplicación

$$\begin{array}{ccc} Gl(E) & \to & Gl(E) \\ \\ \Lambda & \mapsto & \Lambda^{-1} \end{array}$$

es de clase C^{∞}.

Actividad 3.5 *Diga cómo se demuestra este teorema cuando $E = \mathbb{R}^n$.*

4 Teorema de Sard

Definición 6

Sea $f : U \to E_2$ ($U \subset E_1$ abierto) diferenciable en U.

- *$x \in U$ se llama* punto singular *de f si $\mathrm{D} f(x) : E_1 \to E_2$ no es sobreyectiva. Los puntos que no son singulares se llaman* puntos regulares.
- *$y \in E_2$ se llama* valor singular *de f si en $f^{-1}(y)$ hay algún punto singular. Los elementos de E_2 que no son valores singulares se llaman* valores regulares

Observaciones

1. Cuando $E_2 = \mathbb{R}$ los puntos singulares son los *puntos críticos* de f.
2. Notemos que si $y \in E_2$ es un valor regular de f con $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ entonces el teorema de la función implícita describe este conjunto y este subconjunto de E_1 se llama subvariedad.

El siguiente teorema dice que en espacios de dimensión finita y bajo condiciones adecuadas “casi” todos los puntos de E_2 son regulares. Esto en parte es consecuencia de que que el conjunto de valores singulares es “muy chico” en el sentido siguiente:

Definición 7 (Medida de Lebesgue nula) *Sea* $X \subset \mathbb{R}^m$. *Se dice que* X *tiene* medida de Lebesgue nula *si para todo* $\epsilon > 0$ *existe una familia* $\{B_{\delta_i}(x_i)\}_{i \in I}$ *con*

- $X \subset \bigcup_{i \in I} B_{\delta_i}(x_i)$
- $\sum_{i \in I} \delta_i < \epsilon$

Teorema 14
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ *abierto y* $f : U \to \mathbb{R}^m$ *de clase* C^∞. *Entonces el conjunto de valores singulares de* f *tiene medida de Lebesgue cero.*

Actividad 4.1
Cuando $n = m = 1$ *el teorema de Sard dice que si* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es suave (en este caso basta con que* f *sea de clase* C^1*) entonces*

$$f(\{x\,;\, f'(x) = 0\})$$

tiene medida cero.
Cuando $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es de clase* C^1 *entonces para* $x \in [a,b]$, $|f'(x)|$ *mide aproximadamente la longitud de* $f([a,b])$. *Usando esto diseñe una estrategia para demostrar el teorema en este caso particular.*

Teorema 15
Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ *abierto y* $f : U \to \mathbb{R}^m$ *de clase* C^∞. *Entonces el conjunto de valores regulares de* f *es intersección enumerable de abiertos densos.*

Nota

En realidad el teorema de Sard no requiere que la función sea de clase C^∞, requiere que sea de clase C^r con $r > \max\{0, n-m\}$. En particular, cuando $m > n$ se requiere solamente que f sea de clase C^1 . Por ejemplo, esto dice que la imagen de una curva de clase C^1 en $\mathbb{R}^2$ tiene medida cero.

Actividad 4.2 *Diseñe una estrategia para demostrar la afirmación de la nota.*

Bibliografía

[1] Bromberg, S. y Rivaud, J.J. *Análisis Diferencial*. Fondo de Cultura Económica. Colección Matmática Superior. Mécico, 1975.

[2] Kaplan, W. *Advanced Calculus*. Addison-Wesley, 1952.